

Deux remarques sur le problème de Lehmer sur les variétés abéliennes

Nicolas Ratazzi

Abstract : Let A/K be an abelian variety over a number field K . We prove in this article that a good lower bound (in terms of the degree $[K(P) : K]$) for the Néron-Tate height of the points P of infinite order modulo every strict abelian subvarieties of A implies a good lower bound for the height of all the non-torsion points of A . In particular when A is of C.M. type, a theorem of David and Hindry enables us to deduce, up to “log” factors, an optimal lower bound for the height of the non-torsion points of A . In the C.M. type case, this improves the previous result of Masser [2]. Using the same theorem of David and Hindry we prove in the second part an optimal lower bound, up to “log” factors, for the product of the Néron-Tate height of n $\text{End}(A)$ -linearly independant non-torsion points of a C.M. type abelian variety.

Keywords : Abelian varieties, normalised height, Lehmer’s problem

2000 Mathematics Subject Classification : 11G50, 14H52, 14K22, 11R18

On montre ici que la première partie de la conjecture de Lehmer abélienne (minoration des points engendrant la variété abélienne en terme de l’indice d’obstruction), formulée dans [1] entraîne la seconde partie de cette conjecture (minoration des points non de torsion en fonction du degré du point et de la dimension du plus petit sous-groupe algébrique contenant le point). De même pour le résultat non-conjectural, ce qui permet d’améliorer le précédent meilleur résultat connu, dû à Masser [2], pour la minoration des points d’ordre infini sur les variétés abéliennes de type C.M. Par ailleurs on montre que la conjecture de Lehmer abélienne entraîne la conjecture de Lehmer abélienne multihomogène *a priori* plus forte, telles qu’elles sont énoncées dans [1]. On montre également que toute avancée en direction de la conjecture de Lehmer entraîne une avancée similaire en direction de la conjecture multihomogène. En utilisant le résultat principal de [1] on en déduit, en direction de la conjecture multihomogène, une minoration optimale aux puissances de log près dans le cas des variétés abéliennes de type C.M.

Email address : ratazzi@math.jussieu.fr

1 Sur la conjecture de Lehmer sur les variétés abéliennes

Rappelons la conjecture de Lehmer abélienne, formulée dans [1] conjecture 1.4. On note $\delta_L(P)$ l'indice d'obstruction de P .

Conjecture 1.1 (David-Hindry) *Soient A/K une variété abélienne de dimension g sur un corps de nombres et L un fibré en droites symétrique ample sur A . Il existe une constante strictement positive $c(A/K, L)$ telle que pour tout point $P \in A(\overline{K})$ d'ordre infini modulo toute sous-variété abélienne stricte de A , on a*

$$\widehat{h}_L(P) \geq \frac{c(A/K, L)}{\delta_L(P)}. \quad (1)$$

De plus, en terme du degré $D = [K(P) : K]$, on a pour tout point $P \in A(\overline{K})$ qui n'est pas de torsion

$$\widehat{h}_L(P) \geq \frac{c(A/K, L)}{D^{\frac{1}{g_0}}}, \quad (2)$$

où g_0 est la dimension du plus petit sous-groupe algébrique contenant le point P .

En utilisant le théorème de David et Hindry [1] on obtient un résultat, optimal aux puissances de log près en direction de l'inégalité (2) de la conjecture précédente.

Théorème 1.1 *Si A/K est de type C.M., alors il existe une constante strictement positive $c(A/K, L)$ telle que pour tout point $P \in A(\overline{K})$ d'ordre infini, on a*

$$\widehat{h}_L(P) \geq \frac{c(A/K, L)}{D^{\frac{1}{g_0}}} (\log 2D)^{-\kappa(g_0)},$$

où $D = [K(P) : K]$, où g_0 est la dimension du plus petit sous-groupe algébrique de A contenant P et où $\kappa(g_0) = (2g_0(g_0 + 1)!)^{g_0+2}$.

Démonstration : C'est une conséquence immédiate du corollaire 2 de [5] appliqué à la variété $V = \overline{\{P\}}$ image schématique de P dans A sur K . On peut faire une preuve directe (ce qui permet d'utiliser le résultat principal de [1] sans avoir à faire intervenir en plus leur remarque utilisant l'indice d'obstruction) : on commence par le cas où $A = \prod_{i=1}^n A_i^{r_i}$, les A_i étant des variétés abéliennes simples deux à deux non-isogènes et où L est le fibré en droites ample et symétrique associé au plongement

$$A = \prod_{i=1}^n A_i^{r_i} \hookrightarrow \prod_{i=1}^n \mathbb{P}_{n_i}^{r_i} \xrightarrow{\text{Segre}} \mathbb{P}^N,$$

les A_i étant plongées dans \mathbb{P}_{n_i} par des fibrés L_i très amples et symétriques. On note G le plus petit sous-groupe algébrique contenant V . On note G^0 la composante connexe de

l'identité de G . C'est une sous-variété abélienne de A et elle est donc isogène à $B = \prod_{i=1}^n A_i^{s_i}$ où $0 \leq s_i \leq r_i$. On note alors $\pi : A \rightarrow B$ une projection naturelle obtenue par oubli de certaines coordonnées, de sorte que $\pi|_G$ est une isogénie. Montrons que l'on est dans les conditions d'application du théorème principal de [1] en prenant comme variété abélienne B et comme point $\pi(P)$.

Si $\pi(P)$ est d'ordre fini modulo une sous-variété abélienne stricte de B , en notant H le plus petit sous-groupe algébrique contenant $\pi(P)$, on a $\dim H < \dim B$. Ainsi $G_1 = G \cap \pi^{-1}(H)$ est un sous-groupe algébrique strict de G (car $\pi|_G$ est une isogénie), contenant V . Ceci est absurde.

Si $\pi(P)$ est d'ordre fini, comme π est une isogénie, le point P est aussi d'ordre fini. Ceci est absurde.

Finalement, $\pi(P)$ est un point d'ordre infini modulo toute sous-variété abélienne de B . On peut donc appliquer le théorème principal de [1]. Par ailleurs, la hauteur et le degré sont définis relativement aux plongements

$$A = \prod_{i=1}^n A_i^{r_i} \hookrightarrow \prod_{i=1}^n \mathbb{P}_{n_i}^{r_i} \xrightarrow{\text{Segre}} \mathbb{P}^{N_A} \quad \text{et} \quad B = \prod_{i=1}^n A_i^{s_i} \hookrightarrow \prod_{i=1}^n \mathbb{P}_{n_i}^{s_i} \xrightarrow{\text{Segre}} \mathbb{P}^{N_B}.$$

De plus l'application $\bar{\pi} : \prod_{i=1}^n \mathbb{P}_{n_i}^{r_i} \rightarrow \prod_{i=1}^n \mathbb{P}_{n_i}^{s_i}$ est la projection linéaire définie par oubli de coordonnées. Dans ce cas, et pour ces plongements, on a

$$\hat{h}_{M_B}(\pi(P)) \leq \hat{h}_M(P) \quad \text{et} \quad \deg \pi(P) \leq \deg P.$$

Ceci nous donne

$$\begin{aligned} \hat{h}_M(P) &\geq \hat{h}_{M_B}(\pi(P)), \quad \text{d'où par le théorème de [1],} \\ &\geq \frac{c(B, M_B)}{(\deg \pi(P))^{\frac{1}{g_0}}} (\log 2 \deg \pi(P))^{-\kappa(g_0)} \\ &\geq \frac{c(B, M_B)}{(\deg P)^{\frac{1}{g_0}}} (\log 2 \deg P)^{-\kappa(g_0)}. \\ &\geq \frac{c'(A, M)}{(\deg P)^{\frac{1}{g_0}}} (\log 2 \deg P)^{-\kappa(g_0)}, \end{aligned}$$

où on a pris pour $c'(A, M)$ le minimum des $c(B, M_B)$ quand s_i varie dans $\llbracket 0, r_i \rrbracket$.

Dans le cas général, la variété abélienne A est donnée avec une isogénie ρ vers la variété abélienne $B = \prod_{i=1}^n A_i^{r_i}$. Soit P d'ordre infini de la variété abélienne de A . Le point $Q = \rho(P)$ est un point d'ordre infini de la variété abélienne de B . Il résulte facilement de la preuve de la proposition 14. de [4] qu'il existe $c'(A, L)$ tel que

$$\hat{h}_L(P) \geq c'(A, L) \hat{h}_M(Q).$$

Ainsi en appliquant le résultat précédent, on en déduit presque l'inégalité voulue : il faut encore remplacer le degré $\deg Q$ par $\deg P$. Or $\deg Q \leq \deg P$. Ceci permet de conclure. \square

Ce résultat améliore le meilleur résultat précédemment connu, dû à Masser qui obtient dans [2], pour tout point P d'ordre infini de $A(\overline{K})$:

$$\widehat{h}_L(P) \geq \frac{c(A/K, L)}{D^2 \log 2D}.$$

En faisant la même preuve et en appliquant la partie (1) de la conjecture 1.1 au lieu du théorème de [1], on obtient le

Corollaire 1.1 *La partie (1) de la conjecture 1.1 entraîne sa partie (2).*

2 Sur la conjecture de Lehmer multihomogène sur les variétés abéliennes

Soit A/K une variété abélienne de dimension g . Quitte à augmenter un peu K (cf. par exemple [5] lemme 1), on peut supposer (et on suppose) que tous les endomorphismes de A sont définis sur K . On note \widehat{h}_L la hauteur de Néron-Tate sur $A(\overline{K})$ associée à un diviseur ample et symétrique L . Pour tout entier n on pose $L_n = L^{\boxtimes n}$ fibré en droites symétrique ample sur A^n et on note \widehat{h}_{L_n} la hauteur de Néron-Tate associée. On commence par un lemme.

Lemme 2.1 *Soit (P_1, \dots, P_n) un point de $A^n(\overline{K})$. On a*

$$\widehat{h}_{L_n}(P_1, \dots, P_n) = \sum_{i=1}^n \widehat{h}_L(P_i).$$

Démonstration : C'est une conséquence formelle des propriétés de fonctorialité des hauteurs de Weil et de la définition de la hauteur de Néron-Tate. \square

En utilisant ce lemme, on démontre le résultat suivant :

Théorème 2.1 *Si A/K est de type C.M., alors, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ il existe une constante $c(A/K, L, n) > 0$ telle que pour tout point $(P_1, \dots, P_n) \in A^n(\overline{K})$ d'ordre infini modulo toute sous-variété abélienne stricte de A^n , on a :*

$$\prod_{i=1}^n \widehat{h}_L(P_i) \geq \frac{c(A/K, L, n)}{D^{\frac{1}{g}}} (\log 2D)^{-n\kappa(g)},$$

où $D = [K(P_1, \dots, P_n) : K]$.

Démonstration : Soient A_1, \dots, A_n des entiers strictement positifs et Q_1, \dots, Q_n des points de $A(\overline{K})$ tels que pour tout i , $P_i = A_i Q_i$. On a

$$\widehat{h}_{L_n}(Q_1, \dots, Q_n) = \sum_{i=1}^n \widehat{h}_L(Q_i) = \sum_{i=1}^n A_i^{-2} \widehat{h}_L(P_i),$$

et,

$$[K(Q_1, \dots, Q_n) : K]^{\frac{1}{ng}} \leq (A_1^{2g} \times \dots \times A_n^{2g} D)^{\frac{1}{ng}}.$$

Le théorème de David-Hindry nous donne alors

$$\sum_{i=1}^n A_i^{-2} \widehat{h}_L(P_i) \geq \frac{c(A/K, L, n)}{\left(\prod_{i=1}^n A_i^{\frac{2}{n}}\right) D^{\frac{1}{gn}}} \left(\log \left(\left(\prod_{i=1}^n A_i\right) D \right) \right)^{-\kappa(g)}.$$

On pose maintenant, pour tout $1 \leq i \leq n$,

$$x_i = \frac{13 \widehat{h}(P_i)}{4 \min_j \widehat{h}(P_j)}, \text{ et } A_i = [\sqrt{x_i}].$$

Pour tout i , on a $x_i \geq \frac{13}{4}$ et $x_i \geq A_i^2 \geq \frac{x_i}{3}$. Ainsi,

$$\sum_{i=1}^n A_i^{-2} \widehat{h}_L(P_i) \leq \frac{3 \times 4}{13} n \min_j \widehat{h}_L(P_j),$$

et

$$\prod_{i=1}^n A_i^2 \leq \left(\frac{13}{4 \min_j \widehat{h}_L(P_j)} \right)^n \prod_{i=1}^n \widehat{h}_L(P_i).$$

Donc,

$$\begin{aligned} \min_j \widehat{h}_L(P_j) &\geq c_{10}(A/K, L, n) \sum_{i=1}^n A_i^{-2} \widehat{h}_L(P_i) \\ &\geq \frac{c_{11}(A/K, L, n)}{\left(\prod_{i=1}^n A_i^{\frac{2}{n}}\right) D^{\frac{1}{gn}}} \left(\log 2D \prod_{i=1}^n A_i \right)^{-\kappa(g)} \\ &\geq \frac{4c_{11}(A/K, L, n) \min_j \widehat{h}_L(P_j)}{13 \prod_{i=1}^n \widehat{h}_L(P_i)^{\frac{1}{n}} D^{\frac{1}{gn}}} \left(\log 2D \prod_{i=1}^n A_i \right)^{-\kappa(g)}. \end{aligned}$$

Par ailleurs, on a la majoration

$$\log \prod_{i=1}^n A_i \leq n \log \left(\frac{13}{2 \min_j \widehat{h}_L(P_j)} \right) + 2 \log \prod_{i=1}^n \widehat{h}_L(P_i).$$

Or on peut toujours supposer que les $\widehat{h}_L(P_i)$ sont inférieurs à 1, donc,

$$\log \prod_{i=1}^n A_i \leq n \log \left(\frac{13}{2 \min_j \widehat{h}_L(P_j)} \right).$$

Ainsi,

$$\log 2D \prod_{i=1}^n A_i \leq n \log \left(\frac{13D^{\frac{1}{n}}}{2 \min_j \widehat{h}_L(P_j)} \right).$$

On en déduit que

$$\prod_{i=1}^n \widehat{h}_L(P_i)^{\frac{1}{n}} \geq \frac{c_1(A/K, n)}{D^{\frac{1}{ng}}} \left(\log \frac{D^{\frac{1}{n}}}{\min_j \widehat{h}_L(P_j)} \right)^{-\kappa(g)}.$$

Le point (P_1, \dots, P_n) étant d'ordre infini modulo toute sous-variété abélienne, les points P_i sont en particulier d'ordre infini sur A . Le résultat inconditionnel de Masser sur la minoration de la hauteur des points sur les variétés abéliennes, theorem de [3], nous donne donc :

$$\log \frac{D^{\frac{1}{n}}}{\min_j \widehat{h}_L(P_j)} \leq c_2(A/K, L, n) \log 2D.$$

Ainsi, on en déduit

$$\prod_{i=1}^n \widehat{h}_L(P_i) \geq \frac{c_3(A/K, L, n)}{D^{\frac{1}{g}}} (\log 2D)^{-n\kappa(g)}$$

ce qui conclut. □

Remarque 2.1. Si au lieu de faire appel au théorème 1.5. de [1] dans la preuve du théorème 2.1 on applique la conjecture 1.1, alors on en déduit le résultat suivant :

Théorème 2.2 *Soient A/K une variété abélienne de dimension g sur le corps de nombres K et L un fibré en droites symétrique ample sur A . Si la conjecture 1.1 est vraie pour $(A/K, L)$ alors, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ il existe une constante $c(A/K, L, n) > 0$ telle que pour tout point $(P_1, \dots, P_n) \in A^n(\overline{K})$ d'ordre infini modulo toute sous-variété abélienne stricte de A^n , on a :*

$$\prod_{i=1}^n \widehat{h}_L(P_i) \geq \frac{c(A/K, L, n)}{D^{\frac{1}{g}}},$$

où $D = [K(P_1, \dots, P_n) : K]$.

Remarque 2.2. En fait dans leur article [1], les auteurs formulent également une conjecture multihomogène du problème de Lehmer abélien. Plutôt que de supposer le point (P_1, \dots, P_n) d'ordre infini modulo toute sous-variété abélienne stricte de A^n , il supposent les points P_i linéairement indépendants dans A . Précisément ils donnent la conjecture 1.6 suivante :

Conjecture 2.1 (David-Hindry) Soient A/K une variété abélienne de dimension g sur un corps de nombres et L un fibré en droites symétrique ample sur A . Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ il existe une constante $c(A/K, L, n) > 0$ telle que pour tout n -uplet (P_1, \dots, P_n) de points d'ordre infini dans $A(\overline{K})$, $\text{End}(A)$ -linéairement indépendants, on a :

$$\prod_{i=1}^n \widehat{h}_L(P_i) \geq \frac{c(A/K, L, n)}{D^{\frac{1}{g}}},$$

où $D = [K(P_1, \dots, P_n) : K]$.

Dans la formulation de la conjecture 2.1 qu'ils donnent, David-Hindry écrivent "linéairement indépendants" sans préciser s'il s'agit de \mathbb{Z} -linéairement ou de $\text{End}(A)$ -linéairement indépendants. Il paraît préférable de préciser. En effet, si on comprend l'assertion "linéairement indépendants" comme \mathbb{Z} -linéairement indépendants, alors la conjecture 2.1 est fausse comme le montre l'exemple suivant : on prend E/K une courbe elliptique à multiplication complexe par un corps quadratique imaginaire contenu dans K . On se donne $\alpha \in \text{End}(E)$ un endomorphisme qui n'est pas la multiplication par un entier, on se donne également un point P_1 d'ordre infini dans $E(\overline{K})$ et pour tout $n \geq 1$, on choisit des points P_n tels que $nP_n = P_1$. Enfin on pose $Q_n = \alpha(P_n)$. Puisque P_1 est d'ordre infini, les points P_n et Q_n sont \mathbb{Z} -linéairement indépendants. De plus on a

$$\widehat{h}(P_n)\widehat{h}(Q_n) = \frac{N(\alpha)}{n^4}\widehat{h}(P_1)^2,$$

et,

$$D_n := [K(P_n, Q_n) : K] = [K(P_n) : K] \leq cn^2.$$

Donc,

$$\widehat{h}(P_n)\widehat{h}(Q_n) \leq \frac{c'}{D_n^2}.$$

Ceci montre que l'hypothèse " \mathbb{Z} -linéairement indépendants" est insuffisante.

Par contre en supposant les points $\text{End}(A)$ -linéairement indépendants, la situation est bien meilleure. Précisément, on a le

Théorème 2.3 *La conjecture 1.1 entraîne la conjecture 2.1.*

Démonstration : Soit $n > 0$ un entier. Au vu du théorème 2.2, la seule chose à prouver, est de montrer que l'hypothèse (i) : "les points (P_1, \dots, P_n) sont $\text{End}(A)$ -linéairement indépendants", entraîne l'hypothèse (ii) : "le point $\mathbf{P} = (P_1, \dots, P_n)$ est d'ordre infini modulo toute sous-variété abélienne stricte de A^n ." On va plutôt montrer que non(ii) implique non(i). Si non(ii) est vraie, alors, il existe un endomorphisme φ , non-nul, de A^n tel que $\varphi(\mathbf{P}) = 0$. Or on peut écrire $\varphi(\mathbf{P}) = (\varphi_1(\mathbf{P}), \dots, \varphi_n(\mathbf{P}))$, où les φ_i sont des morphismes de A^n vers A non tous nuls. On suppose par exemple que φ_1 est non-nul. En notant ψ_i la

restriction de φ_1 à la i -ème composante de A^n , on obtient ainsi n endomorphismes de A , ψ_1, \dots, ψ_n , non tous nuls et tels que

$$\sum_{i=1}^n \psi_i(P_i) = \varphi_1(\mathbf{P}) = 0.$$

Autrement dit, les points P_1, \dots, P_n sont $\text{End}(A)$ -linéairement dépendants. □

Enfin la même preuve permet de constater que le théorème 2.2 entraîne un énoncé analogue en remplaçant l’hypothèse “d’ordre infini modulo toute sous-variété abélienne stricte” par “ $\text{End}(A)$ -linéairement indépendants”. Ce dernier résultat a également été montré par Viada [6] proposition 4. dans le cas particulier où A est une courbe elliptique.

Références

- [1] S. David and M. Hindry. Minoration de la hauteur de Néron-Tate sur les variétés abéliennes de type C. M. In *J. Reine Angew. Math.*, volume 529, pages 1–74, 2000.
- [2] D. Masser. Lettre à Daniel Bertrand du 10 novembre 1986.
- [3] D. Masser. Small values of the quadratic part of the Néron-Tate height on an abelian variety. In *Compositio Math.*, volume 53, no. 2, pages 153–170, 1984.
- [4] P. Philippon. Sur des hauteurs alternatives III. In *J. Math. Pures Appl.*, volume 74, pages 345–365, 1995.
- [5] N. Ratazzi. Densité de points et minoration de hauteur. to appear in the Journal of Number Theory.
- [6] E. Viada. The intersection of a curve with algebraic subgroups in a product of elliptic curves. In *Ann. Scuola Norm. Pisa Cl. Sci. Série (V)*, volume 1, pages 47–75, 2002.

Adress : RATAZZI Nicolas

Université Paris 6 Institut de Mathématiques

Projet Théorie des nombres

Case 247

4, place Jussieu

75252 Paris Cedex 05

FRANCE

email : ratazzi@math.jussieu.fr